

логики и теории множеств. На наш взгляд, примерное содержание этого курса может включать в себя следующие разделы: элементы формальной логики (высказывания, логические операции, кванторы, алгебра логики); математические утверждения (теоремы, их виды; необходимое и достаточное условие; индуктивные и дедуктивные умозаключения; способы доказательства теорем); элементы теории множеств (множества, операции над множествами, декартово произведение множеств); отображения (отображения, виды отображений, свойства отображений); понятие о математическом моделировании (математические модели, примеры); проведение математического исследования и использование математических пакетов при выполнении исследования и оформлении результатов (с выполнением студентами курсового проекта по математике).

Пока небольшой опыт внедрения этого курса позволяет сказать, что указанные выше цели в общем были достигнуты.

Гумеров Ильнур Сабитович
Сибайский институт (филиал)
Башкирского государственного ун-та
Россия, Сибай
e-mail: gis_71@mail.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ¹

© В. И. Гурман, Е. А. Трушкова

Рассматривается дискретная управляемая система

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_I, t_I + 1, \dots, t_F\}, \quad x \in R^n, u \in R^p, \\ x(t_I) &= x_I, \quad I(x, u) = F(x(t_F)), \quad F: R^n \rightarrow R. \end{aligned} \quad (1)$$

Известен допустимый элемент $m^I = (x^I(t), u^I(t))$ — решение этой системы. Требуется найти допустимый элемент $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$ такой, что выполняется неравенство

$$I(m^{II}) = F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F)) = I(m^I).$$

Задачи с дополнительными ограничениями сводятся к сформулированной известным методом штрафов. Общие конструкции метода улучшения управления приведены в [1], где на основе принципа оптимальности Кротова элемент m^{II} ищется путем аппроксимации решения следующей задачи:

$$y(t+1) = g(t, y(t), v(t)), \quad t \in T = \{t_I, t_I + 1, \dots, t_F\}, \quad y \in R^n, v \in R^p,$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №05-01-00260).

$$y^0(t+1) = y^0(t) + \frac{1}{2}v^T(t)v(t), \quad y^0 \in R,$$

$$y(t_I) = 0, \quad y^0(t_I) = 0,$$

$$F_\alpha(y^0(t_F), y(t_F)) = \alpha y^0 + (1 - \alpha)F(y(t_F) + x^I(t_F)) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Здесь $y(t) = x(t) - x^I(t)$, $v(t) = u(t) - u^I(t)$, $\alpha \in (0, 1]$ — параметр метода,

$$g(t, y(t), v(t)) = f(t, y(t) + x^I(t), v(t) + u^I(t)) - f(t, x^I(t), u^I(t)).$$

Ищется функция Кротова в виде

$$\varphi(t, y^0, y) = \nu(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \frac{1}{2}y^T\sigma(t)y,$$

где значения $\nu(t)$, $\psi^0(t)$, $\psi(t)$, $\sigma(t)$ находятся из следующих приближенных соотношений (Кротова–Беллмана) для задачи (2):

$$\varphi(t_F, y^0, y) \approx -F_\alpha(y^0, y),$$

$$\varphi(t, y^0, y) \approx \max_{v \in R^p} \varphi\left(t+1, y^0 + \frac{1}{2}v^T v, g(t, y, v)\right), \quad t = t_F - 1, t_F - 2, \dots, t_I + 1. \quad (3)$$

При этом управление (в форме синтеза) для задачи (2) и затем искомый элемент m^{II} получаются из условий:

$$v^{II}(t, y) \approx \arg \max_{v \in R^p} \varphi\left(t+1, y^0 + \frac{1}{2}v^T v, g(t, y, v)\right), \quad t \in T \setminus \{t_F\},$$

$$x^{II}(t_I) = x_I, \quad x^{II}(t+1) = f(t, x^{II}(t), u^{II}(t)), \quad t \in T \setminus \{t_I\},$$

$$u^{II}(t) = v^{II}(t, x^{II}(t) - x^I(t)) + u^I(t), \quad t \in T \setminus \{t_F\}.$$

Вычислительный алгоритм улучшения второго порядка основан на разложении правых частей соотношений (3) для каждого фиксированного момента времени в ряд в окрестности нуля до членов второго порядка включительно, при этом частные производные заменяются разностными аналогами (шаги разностных схем учитывают разномасштабность переменных и одновременно выступают дополнительными регуляторами метода). Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Полагается $t = t_F$. Ищутся значения $\nu(t_F)$, $\psi^0(t_F)$, $\psi^T(t_F)$, $\sigma(t_F)$ из условий:

$$\begin{aligned} \nu(t_F) &= -F_\alpha(0), \quad \psi^0(t_F) = -\alpha, \\ \psi_i(t_F) &= -\frac{1}{\gamma}(F_\alpha(0|\gamma_{/i}) - F_\alpha(0)), \quad i = \overline{1, n}, \\ \sigma_{ii}(t_F) &= -\frac{1}{\gamma^2}(F_\alpha(0|2\gamma_{/i}) - 2F_\alpha(0|\gamma_{/i}) + F_\alpha(0)), \quad i = \overline{1, n}, \\ \sigma_{ij}(t_F) &= -\frac{1}{\gamma^2}(F_\alpha(0|\gamma_{/i}, \gamma_{/j}) - F_\alpha(0|\gamma_{/i}) - F_\alpha(0|\gamma_{/j}) + F_\alpha(0)), \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где γ — некоторое число (регулятор метода). Здесь через $F_\alpha(0|\gamma_{/i})$ обозначено значение функции F_α в точке $(y^0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) = (0, 0, \dots, 0, \gamma, 0, \dots, 0)$.

2. Уменьшается значение t на единицу. Вводится в рассмотрение функция:

$$H_\alpha(t, y, v) = \nu(t+1) - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^p v_i^2 + \psi^T(t+1)g(t, y, v) + \frac{1}{2}g^T(t, y, v)\sigma(t+1)g(t, y, v).$$

Эта функция раскладывается в ряд в окрестности нуля, после чего, с учетом формул (3), находятся

$$v^{II}(t, y) = -H_{\alpha vv}^{-1}(t, 0, 0) (H_{\alpha v}(t, 0, 0) + H_{\alpha yv}(t, 0, 0)y),$$

$$\begin{aligned}\nu(t) &= H_\alpha(t, 0, 0), \quad \psi^0(t) = -\alpha, \\ \psi(t) &= H_{\alpha y}(t, 0, 0), \quad \sigma(t) = H_{\alpha yy}(t, 0, 0).\end{aligned}$$

Производные в последних равенствах заменяются разностными аналогами, находятся матричные функции $N_\alpha(t)$, $M_\alpha(t)$, $P_\alpha(t)$, с помощью которых управление (в форме синтеза) для задачи (2) записывается в следующем виде:

$$v^{II}(t, y) = -N_\alpha^{-1}(t) (M_\alpha(t) + P_\alpha^T(t)y).$$

3. Если $t > t_I$, то осуществляется переход на второй шаг алгоритма, иначе полагается

$$u^{II}(t, x) = v^{II}(t, x - x^I(t)) + u^I(t), \quad t \in T \setminus \{t_F\}.$$

С помощью уравнений исходной системы находится соответствующий искомый элемент $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$.

Метод был успешно применен для практической реализации скользящих режимов и для определения границы опасной зоны и управления вертолетом при посадке в нештатной ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997.

Гурман Владимир Иосифович
Институт программных систем РАН
Россия, Переславль-Залесский
e-mail: gurman@cprc.botik.ru

Трушкова Екатерина Александровна
Институт программных систем РАН
Россия, Переславль-Залесский
e-mail: katerina@tea.botik.ru

Поступила в редакцию 7 мая 2007 г.

СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ¹

© Ю. Ф. Долгий

Рассмотрим линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d\eta(t, s) x(t+s), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №06-01-00399) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №13 «Математические методы в нелинейной динамике».